269

F

269F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل ـ سال ۱۳۹۶

رشتهٔ امتحانی ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

تعداد سؤال: ۴۵ | مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعهٔ دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی ـ آنالیز ریاضی ـ مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی ـ مبانی جبر ـ جبر پیشرفته ـ آنالیز حقیقی)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه ـ سال ۱۳۹۵

مبانی آنالیز ریاضی ــ آنالیز ریاضی:

۱- اگر $a, b > 1$ ، مقدار $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1}{b}\right)^n$ کدام است؟

۱) $a^{\frac{1}{b}}$

۲) $\frac{a}{b}$

۳) e^{a-b}

۴) ۱

۲- **فرض کنید $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟**

۱) باز یا بسته یا همبند بودن $f(S)$، پیوستگی f را نتیجه می‌دهد.

۲) باز یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳) همبند یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۴) باز یا همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳- **اگر تابع $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟**

۱) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ هر دو موجود هستند.

۲) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیستند.

۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴- **اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin Q \\ \frac{2}{\pi} & x \in Q \end{cases}$ بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام گزینه درست است؟**

۱) تابع f دارای تابع اولیه است.

۲) تابع f در هیچ نقطه از $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته نیست.

۳) انتگرال بالایی تابع f برابر یک است.

۴) تابع f در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- **فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. متریک ρ را روی X به‌صورت $\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟**

۱) مترهای ρ و d معادل هستند.

۲) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر d همبند باشد.

۳) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر d فشرده باشد.

۴) به ازای هر فضای متریک Y ، تابع $f : X \to Y$ نسبت به متر ρ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر d پیوسته باشد.

۶- اگر $C[a,b]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b]$ ، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی در $[a, b]$ و ψ_n بر $C[a,b]$ به‌صورت $\psi_n(f) = f(x_n)$ تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\{\psi_n\}$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

۱) $\{x_n\}$ همگرا باشد.

۲) $\{x_n\}$ کراندار باشد.

۳) $\{x_n\}$ از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

۴) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid (x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد$\}$ مجهز به متر $d\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$ باشد و $E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) E همبند نیست.

۲) $E^\circ = \phi$.

۳) $E' \neq E$.

۴) E بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک X نیست؟

۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر X اکسترمم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

۲) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y پیوسته یکنواخت است.

۳) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

۴) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y کران‌دار است.

۹- برای هر $n \in \mathbb{N}$ ؛ تابع $f_n(x) = n(\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin x)$ را بر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت دنبالهٔ توابع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بر $\mathbb{R}$...

۱) به‌طور نقطه‌وار به تابع ثابت صفر همگرا است ولی نه به‌طور یکنواخت.

۲) به‌طور نقطه‌وار به تابع $\cos x$ همگرا است ولی نه به‌طور یکنواخت.

۳) به‌طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است.

۴) به‌طور یکنواخت به تابع $\cos x$ همگرا است.

مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی ـ مبانی جبر:

۱۰- فرض کنید $G = S_6$ و $H = \{e, (13), (16), (36), (136), (163)\}$. قرار می‌دهیم $T = \langle H \rangle$. تعداد عناصر مرتبهٔ ۲ در T برابر است با:

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۱۱- فرض کنید G، H، K و N زیر گروه‌هایی از یک گروه باشند. کدام مورد درست است؟

۱) اگر $G'\times G' \simeq H'\times H'$ که G' و H' زیر گروه‌های مشتق هستند، آنگاه $G \simeq H$.

۲) اگر گروه‌های فوق همگی آبلی باشند و $N < H$ و $K < G$ و $K \simeq N$ و $G \simeq H$، آنگاه $\frac{G}{K} = \frac{H}{N}$.

۳) اگر $G \times H = G \times K$، آنگاه $H = K$.

۴) اگر گروه‌های فوق آبلی بوده و $G \cap N = G \cap K$ ، آنگاه $\frac{G+N}{N} \simeq \frac{G+K}{K}$.

۱۲- فرض کنید G یک گروه است و $g \in G$. در این صورت نگاشت $I_g : G \to G$ که $I_g(x) = gxg^{-1}$ را خودریختی داخلی نظیر g می‌نامیم. فرض کنید a و b دو عضو گروه G باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام‌یک درست است؟

۱) $a = b$

۲) $ab = ba$

۳) $b = a^{-1}$

۴) $ab \in Z(G)$

۱۳- در گروه تقارن‌های یک ۱۰ ضلعی منتظم که با D_{20} نمایش داده می‌شود، اگر R یک دوران و T یک انعکاس باشد، که $RT = TR$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) T در مرکز گروه قرار دارد.

۲) R فقط می‌تواند دوران 360° باشد.

۳) R در مرکز گروه قرار دارد.

۴) T با هیچ انعکاسی غیر از خودش جابه‌جا نمی‌شود.

۱۴- فرض کنید K یک میدان شامل Q بوده و $[K : Q] = n$. اگر $\phi : K \to M_2(Q)$ یک تکریختی (منومورفیسم) حلقه‌ای باشد، n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) ۱

۲) ۱, ۲

۳) ۱, ۲, ۴

۴) نامتناهی حالت برای n وجود دارد.

۱۵- **کدام مورد صحیح است؟**

۱) هر ایده‌آل ماکسیمال در حلقه R، اول است.

۲) هر ایده‌آل سره در حلقه R در یک ایده آل ماکسیمال قرار دارد.

۳) هر ایده‌آل اول ناصفر ماکسیمال است.

۴) اگر حلقه R یکدار و متناهی باشد، آنگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و تعداد ایده‌آل‌های اول R برابر است.

۱۶- **فرض کنیم A یک ماتریس ۴×۵ و B یک ماتریس ۵×۴ با درایه‌های از میدان F باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه A برابر ۴ و رتبه B برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟**

۱) نه AB وارون‌پذیر است و نه BA.

۲) هم AB وارون پذیر است و هم BA.

۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۱۷- **ماتریس $A \in M_{۲}(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^{۲} + ۴A + ۳I = ۰$ صدق می‌کند. $Tr(A)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر <u>نمی‌تواند</u> باشد؟**

۱) -۱

۲) -۳

۳) -۵

۴) -۷

۱۸- **ماتریس $A \in M_{۵}(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^{۲} - ۴A - I = ۰$ صدق می‌کند. اگر $a_{۱}, a_{۲}, \dots, a_{۵}$ مقدار ویژه‌های A باشند، مقدار $(a_{۱} - \frac{۱}{a_{۱}}) + (a_{۲} - \frac{۱}{a_{۲}}) + \dots + (a_{۵} - \frac{۱}{a_{۵}})$ کدام است؟**

۱) ۴

۲) -۲۰

۳) ۲۰

۴) -۴

۱۹- ماتریس A یک ماتریس ۱۳۹۵×۱۳۹۵ است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند. این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون‌پذیر است؟

۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۷

۴) ۴۱

۲۰- فرض کنید $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$ و هر دو دارای مقدار ویژهٔ ۲ با تکرر ۷ باشند. اگر A و B قطری شدنی باشند، در این صورت رتبهٔ ماتریس $A - B$ حداکثر چه می‌تواند باشد؟

۱) ۹

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶

۲۱- فرض کنید $A \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) = 3$ ، $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(B) = 2$. در این‌صورت: $\dim(\{X \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$ برابر است با:

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

<u>جبر پیشرفته:</u>

۲۲- اشتراک همهٔ ایده‌آل‌های اول حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$ برابر است با:

۱) $\frac{10\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۲) $\frac{15\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۳) $\frac{30\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۴) $\frac{60\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۲۳- $\mathbb{Z}$ - مدول $(\mathbb{Z}_۲ \oplus Q) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_۲ \oplus Q)$ با کدام یک از $\mathbb{Z}$ - مدول‌های زیر یکریخت است؟

۱) Q

۲) $\mathbb{Z}_۴ \oplus Q$

۳) $\mathbb{Z}_۲ \oplus Q$

۴) $\mathbb{Z} \oplus Q$

۲۴- R حلقه جابه‌جایی و یکدار و M و N دو R- مدول یکانی دوری فرض می‌شوند. اگر $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(N)$، کدام یک از موارد زیر درست است؟

۱) $\mathrm{Ann}(M \oplus N) \subsetneq \mathrm{Ann}(M)$

۲) $M = N$

۳) $\mathrm{Ann}(M) \subsetneq \mathrm{Ann}(M \oplus N)$

۴) $M \cong N$

۲۵- فرض کنید p یک عدد اول باشد. در این صورت تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه $Q_p = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (p,n) = ۱ \right\}$ برابر است با:

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۶- فرض کنید $R = \mathbb{R}[\![x]\!]$ حلقه سری‌های توانی صوری روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) $\mathbb{R}$ آرتینی است.

۲) $\mathbb{R}$ تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

۳) هر ایده‌آل اول $\mathbb{R}$ ماکسیمال است.

۴) $\mathbb{R}$ دارای عنصر پوچتوان ناصفر است.

۲۷- **اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد به گونه‌ای که برای ایده‌آل I، یک R- زیر مدول از $R[x]$ مانند K موجود باشد که $R[x]=I[x]\oplus K$، آنگاه:**

۱) $I[x]$ پروژکتیو و آزاد است.

۲) $I[x]$ نه پروژکتیو است و نه آزاد.

۳) $I[x]$ آزاد است ولی لزوماً پروژکتیو نیست.

۴) $I[x]$ پروژکتیو است ولی لزوماً آزاد نیست.

۲۸- **فرض کنید R حلقه توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با مجموع و حاصلضرب توابع باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟**

۱) R یک حلقه تقسیم است.

۲) R نوتری نیست.

۳) R حوزهٔ صحیح است.

۴) هر ایده‌آل اول R باتولید متناهی است.

۲۹- **فرض کنید G یک گروه بوده و $f:\mathbb{Z}^n \to G$ یک بروریختی (اپی‌مورفیسم) و $g:\mathbb{Z}^n \to G$ یک تکریختی (منومورفیسم) باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (توجه کنید $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}}_{n}$ بار)**

۱) $G \simeq \mathbb{Z}^n$.

۲) G می‌تواند گروهی ناآبلی باشد.

۳) G دارای عنصر غیربدیهی از مرتبهٔ متناهی است.

۴) $G \simeq \mathbb{Z}^r \times H$ که H گروهی متناهی از مرتبهٔ حداقل ۲ است.

۳۰- **فرض کنید $R=Q[x,y,z]$ و $M=\frac{R}{I}$ که در آن $I=\langle x+z\,,y^{2}z\rangle$. چنانچه $f:M\to M$ یک همریختی R- مدولی پوشا باشد کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $Kerf^{2}\neq Kerf$.

۲) زیر مدول ماکسیمال و ناصفر N موجود است که $Kerf=N$.

۳) $Kerf=0$.

۴) زیر مدول مینیمال و ناصفر N موجود است که $Kerf=N$.

۳۱- **فرض کنید R یک حوزهٔ ایده‌آل اصلی باشد که میدان نیست و M یک R- مدول باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟**

۱) M تصویری است اگر و تنها اگر M آزاد باشد.

۲) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه طول M متناهی است.

۳) M تزریقی است اگر و تنها اگر M بخش‌پذیر باشد.

۴) اگر M هم تصویری و هم تزریقی باشد، آنگاه $M=0$.

۳۲- **فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار و I یک ایده‌آل آن باشد به طوری که $\frac{R}{I}$ یک R- مدول تصویری است. در این‌صورت:**

۱) I یک ایده‌آل اصلی و اول است.

۲) I یک ایده‌آل اصلی و پوچتوان است.

۳) I یک ایده‌آل خودتوان و اول است.

۴) I یک ایده‌آل اصلی و خودتوان است.

۳۳- **فرض کنیم R یک حلقه یکدار و جابه‌جایی و M و N دو R – مدول باشند به‌طوری‌که $M\otimes_{R}N$ آزاد ناصفر است. در این صورت $M\oplus N$ یک R- مدول ....**

۱) آزاد است.

۲) نوتری است.

۳) تصویری است.

۴) بخش‌پذیر است.

آنالیز حقیقی:

۳۴- فرض کنید m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ ، m^* اندازهٔ خارجی متناظر با m و A و B دو مجموعه در $\mathbb{R}$ باشند به‌طوری‌که B لبگ اندازه‌پذیر است، $B \subseteq A$ و $m(B)=m^*(A)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $m^*(A \setminus B)=\circ$

۲) مجموعه A، لبگ اندازه‌پذیر است.

۳) مجموعه $A \setminus B$، لبگ اندازه‌پذیر است.

۴) اگر $m^*(A)<\infty$ آنگاه مجموعهٔ A لبگ اندازه‌پذیر است.

۳۵- فرض کنید $A=\{E \subseteq [\circ,۲] \mid E^c=[\circ,۲] \setminus E$ یا E حداکثر شمارا باشد$\}$ و تابع μ بر A با ضابطه $\mu(E)=\begin{cases} \circ & E \text{ حداکثر شمارا باشد} \\ ۲ & E^c \text{ حداکثر شمارا باشد} \end{cases}$ تعریف شده باشد. اگر $\{E_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای دوبه‌دو مجزا از اعضای A باشد به طوری که $E_۱^c$ حداکثر شمارا باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i)=\circ$

۲) $\sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i)=\circ$

۳) $\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i)=۲$

۴) $\sum_{i=۲}^{\infty} \mu(E_i)=۲$

۳۶- اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فضای اندازه (X,Σ,μ) باشد در چه صورت تساوی زیر برقرار است؟

$$\liminf \mu^*(E_n)=\mu^*(\liminf E_n)$$

۱) دنبالهٔ $\{\mu^*(E_n)\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[\circ,\infty]$ همگرا باشد.

۲) $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد.

۳) $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد.

۴) $\limsup \mu^*(E_n) \geq \mu^*(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n)$

۳۷- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\left\{f_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از توابع لبگ اندازه‌پذیر بر $\mathbb{R}$ باشد آنگاه $f=\sup f_\gamma$ اندازه‌پذیر است.

۲) اگر دنبالهٔ توابع لبگ اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ نقطه‌وار به صفر همگرا باشد آنگاه در اندازه نیز به صفر همگراست.

۳) تابع لبگ اندازه‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)+f(y)$ اما f پیوسته نیست.

۴) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ لبگ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای زیرمجموعه‌ای چگال در $\mathbb{R}$ مانند D و برای هر $\alpha\in D$ مجموعه $\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\alpha\}$ لبگ اندازه‌پذیر باشد.

۳۸- برای دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\limits_n |x_n|$، کدام فضا نسبت به $\|\cdot\|_\infty$ باناخ است؟

۱) $\{\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0\}$

۲) $\{\{x_n\}:\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\}$

۳) $\{\{x_n\}:\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$

۴) $\{\{x_n\}:$ فقط تعداد متناهی x_n ناصفر است$\}$

۳۹- کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه $\inf\left\{\alpha:m(\{x:f(x)>\alpha\})=0\right\}=\sup\left\{f(x):x\in\mathbb{R}\right\}$

۲) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ و $f_n\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}0$ آنگاه $f_n\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})}0$

۳) اگر $1<p<q<\infty$ آنگاه $L^q(\mathbb{R})\subseteq L^P(\mathbb{R})$

۴) $L^\infty(\mathbb{R})\subseteq L^1(\mathbb{R})$

۴۰- فرض کنید توابع حقیقی f_n و f بر $\mathbb{R}$ لبگ انتگرال‌پذیر باشند، به طوری که دنبالهٔ $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با $\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|dm\to 0$ معادل است؟

۱) $\int_{\mathbb{R}}|f_n|dm\to\int_{\mathbb{R}}|f|\,dm$

۲) $\int_{\mathbb{R}}f_n\,dm\to\int_{\mathbb{R}}f\,dm$

۳) $f_n\to f$ در اندازه

۴) $f_n\to f$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

۴۱- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\frac{x\ln(1+\frac{x}{n})}{1+x}dx$ کدام است؟

۱) $\ln 2$

۲) $\ln 2-\frac{1}{2}$

۳) $\ln 2-1$

۴) $2\ln 2-1$

۴۲- فرض کنید m اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ و m^* اندازهٔ خارجی متناظر با m باشد و

$A = \{m^*(E)$: نامتناهی با درون تهی باشد $E \subseteq \mathbb{R}\}$

در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $A = \{0\}$

۲) $A = [0, +\infty]$

۳) $A = \{0, +\infty\}$

۴) $A = [0, +\infty)$

۴۳- اگر $E \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$ زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و $f(x) = \begin{cases} X_E(x) + \sin x & x \in Q \cap [0, \frac{\pi}{2}] \\ [x] + \sin x & x \in Q^c \cap [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$، کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ لبگ اندازه‌پذیر نیست.

۲) f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر نیست.

۳) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۴) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ برابر $1 - \frac{\pi}{2}$ است.

۴۴- فرض کنید $M = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1], f(x) = 0 \right\}$ و $P_M : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ تصویر متعامد روی M باشد. برای هر $f \in L^2(\mathbb{R})$ داریم:

۱) $P_M(f) = f$

۲) $P_M(f) = f.x_{[0,1]}$

۳) $P_M(f) = 1 - f$

۴) $P_M(f) = (1 - f).x_{[0,1]}$

۴۵- عملگر خطی $T : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(x, y) = (x - y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$، $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$) در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\|T\| = 2\sqrt{2}$

۲) $\|T\| = 1$

۳) $\|T\| = \sqrt{2}$

۴) عملگر T بی‌کران است.